JOURNAL OF ALGEBRA 25, 100–105 (1973)

Action d'un groupe algébrique dans l'espace des idéaux primitifs d'une algèbre enveloppante

NICOLE CONZE

C.N.R.S., Paris

Communicated by A. W. Goldie

Received October 19, 1971

RAPPELS ET NOTATIONS

Le corps de base k est algébriquement clos, de caractéristique zéro.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble, de dimension finie sur k. On notera G le plus petit groupe algébrique d'automorphismes de $\mathfrak{g}$ dont l'algèbre de Lie contient $ad\mathfrak{g}$. On notera $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*/G$ l'espace des orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$, qu'on munit de la topologie quotient de la topologie de Zariski sur $\mathfrak{g}^*$. On notera $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $S(\mathfrak{g})$ son algèbre symétrique, Prim $U(\mathfrak{g})$ l'espace des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$, Spec $U(\mathfrak{g})$ l'espace des idéaux bilatères premiers de $U(\mathfrak{g})$, (Spec $S(\mathfrak{g}))^G$ l'espace des idéaux premiers G-invariants de $S(\mathfrak{g})$.

L'application de Dixmier [3]: $G \cdot f \mapsto I(f)$, qui applique $\mathfrak{g}^*/G$ dans Prim $U(\mathfrak{g})$, est surjective [6], [2] et continue [1]. Lorsque $\mathfrak{g}$ est nilpotente, elle est bijective. Dans ce cas, les G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$ sont des ensembles fermés irréductibles et s'identifient donc à certains éléments de (Spec $S(\mathfrak{g}))^G$. Lorsque $\mathfrak{g}$ est nilpotente, Gabriel et Nouazé ont défini une bijection β de Spec $U(\mathfrak{g})$ sur (Spec $S(\mathfrak{g}))^G$ telle que la restriction de β^{-1} à $\mathfrak{g}^*/G$ coincide avec l'application de Dixmier.

Soit Γ un groupe algébrique connexe d'automorphismes de $\mathfrak{g}$. Le groupe Γ opère dans $\mathfrak{g}^*/G$ et dans Prim $U(\mathfrak{g})$ par des actions compatibles avec l'application de Dixmier.

A l'aide d'un résultat partiel obtenu par R. Rentschler [8] concernant la bicontinuité (vraisemblable) de l'application de Dixmier, nous montrons ici que, lorsque $\mathfrak{g}$ est nilpotente, les Γ-orbites dans Prim $U(\mathfrak{g})$ sont ouvertes dans leur adhérence, set sont même fermées si Γ est formé d'automorphismes unipotents. (Ce dernier résultat est en quelque sorte un analogue non commutatif de théorèmes de Rosenlicht [9].)

LEMME 1. (R. Rentschler [8]). *Supposons* $\mathfrak{g}$ *nilpotente. Soient* $\mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))^G$ *et* $\mathfrak{q} = \beta^{-1}(\mathfrak{p})$. *Soient* $\mathscr{V}(\mathfrak{p})$ *l'ensemble des idéaux* $\mathfrak{p}' \in (\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))^G$ *qui contiennent* $\mathfrak{p}$, *et* $\mathscr{V}(\mathfrak{q})$ *l'ensemble des idéaux premiers de* $U(\mathfrak{g})$ *qui contiennent* $\mathfrak{q}$. *Il existe des ouverts non vides U de* $\mathscr{V}(\mathfrak{p})$ *et V de* $\mathscr{V}(\mathfrak{q})$ *tels que la restriction de* β *à V soit un homéomorphisme de V sur U.*

LEMME 2. *Avec les notations du Lemme* 1, *on a* $\beta^{-1}(\mathfrak{p}) = \bigcap_{G\cdot f\in\mathscr{V}(\mathfrak{p})} I(f)$.

Démonstration. Soient U et V comme dans le Lemme 1. Comme V est un ouvert dense de $\mathscr{V}(\mathfrak{q})$ et comme $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g}) \cap \mathscr{V}(\mathfrak{q})$ est dense dans $\mathscr{V}(\mathfrak{q})$, l'ensemble $V \cap \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$ est dense dans $\mathscr{V}(\mathfrak{q})$. On a donc:

$$\mathfrak{q} = \bigcap_{I\in V\cap \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})} I = \bigcap_{G\cdot f\in U} I(f).$$

Comme U est un ouvert dense de $\mathscr{V}(\mathfrak{p})$ et comme $\mathfrak{g}^*/G \cap \mathscr{V}(\mathfrak{p})$ est dense dans $\mathscr{V}(\mathfrak{p})$, l'ensemble $U \cap \mathfrak{g}^*/G$ est dense dans $\mathscr{V}(\mathfrak{p})$, et la continuité de l'application $G\cdot f \mapsto I(f)$ entraîne:

$$\mathfrak{q} = \bigcap_{G\cdot f\in U} I(f) = \bigcap_{G\cdot f\in\mathscr{V}(\mathfrak{p})} I(f).$$

THÉORÈME 1. *Supposons* $\mathfrak{g}$ *nilpotente. Si deux* Γ*-orbites dans* $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$ *ont la même adhérence, elles sont égales.*

Démonstration. Soient $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$ telles que les Γ-orbites de $I(f_1)$ et $I(f_2)$ aient la même adhérence, c'est-à-dire:

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} I(\gamma f_1) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} I(\gamma f_2) = \mathfrak{q}.$$

Comme Γ est connexe, la continuité de $f \mapsto I(f)$ entraîne que l'orbite de $I(f)$ est irréductible, c'est à dire $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$; (voir aussi le Lemme 5).

Soit $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2)$ l'idéal de $S(\mathfrak{g})$ formé des polynômes qui s'annulent sur l'orbite $\Gamma G\cdot f_i$. D'après le Lemme 2, on a $\mathfrak{q} = \beta^{-1}(\mathfrak{p}_1) = \beta^{-1}(\mathfrak{p}_2)$, donc $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$. Autrement dit, les orbites $\Gamma G\cdot f_1$ et $\Gamma G\cdot f_2$ ont la même adhérence. Comme elles sont ouvertes dans leur adhérence, elles sont égales.

COROLLAIRE 1. *Soient* $\mathfrak{h}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{g}$ *un idéal nilpotent de* $\mathfrak{h}$, Γ *le plus petit groupe algébrique d'automorphismes de* $\mathfrak{h}$ *dont l'algèbre de Lie contienne* ad h, *L un idéal primitif de* $U(\mathfrak{h})$. *Les idéaux primitifs de* $U(\mathfrak{g})$ *qui sont* $\mathfrak{h}$*-génériques pour* $L \cap U(\mathfrak{g})$ (cf. [4]) *forment une* Γ*-orbite dans* $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$.

En effet, un idéal primitif I de $U(\mathfrak{g})$ est $\mathfrak{h}$-générique pour $L \cap U(\mathfrak{g})$ si et seulement si $L \cap U(\mathfrak{g}) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma(I)$, autrement dit si l'adhérence de $\Gamma(I)$ dans $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$ est l'ensemble fermé défini par $L \cap U(\mathfrak{g})$.

Corollaire 2. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble, I un idéal primitif de* $U(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{k}$ *un idéal nilpotent de* $\mathfrak{g}$; *posons* $K = I \cap U(\mathfrak{k})$. *Pour tout idéal primitif* L *de* $U(\mathfrak{k})$ $\mathfrak{g}$-*générique pour* K, *il existe une représentation irréductible* σ *de* $\mathfrak{k}$, *de noyau* L *dans* $U(\mathfrak{k})$, *une représentation irréductible* ρ *de* $\mathfrak{h} = st(\sigma; \mathfrak{g}) = st(L; \mathfrak{g})$, *telles que* $\rho \mid \mathfrak{k}$ *soit un multiple de* σ *et que* $\operatorname{Ind}(\rho, \mathfrak{g})$ *soit irréductible, de noyau* I *dans* $U(\mathfrak{g})$.

Cela résulte de [4, Prop. 5–5] et du Corollaire 1. (Le Corollaire 2 était présumé dans [4, Remarque 6-1].)

Lemme 3. *Soient* $\mathfrak{h}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{g}$ *un idéal résoluble de* $\mathfrak{h}$, K *un idéal bilatère premier* $\mathfrak{h}$-*invariant de* $U(\mathfrak{g})$ *tel que les seuls éléments du corps des fractions de* $U(\mathfrak{g})/K$ *annulés par* $\mathfrak{h}$ *soient les scalaires.*

(i) *L'intersection* $\check{K}$ *des idéaux bilatères premiers* $\mathfrak{h}$-*invariants de* $U(\mathfrak{g})$ *qui contiennnent strictement* K *est différente de* K.

(ii) *Si* $\mathfrak{h}$ *est nilpotente,* K *est maximal parmi les idéaux bilatères premiers* $\mathfrak{h}$-*invariants de* $U(\mathfrak{g})$.

(i) est prouvé dans [3, Lemme 3-4; 5]. Nous allons prouver (ii) en reprenant la démonstration du Lemme 3-4 de [3] dans le cas où $\mathfrak{h}$ est nilpotente. L'assertion se démontre par récurrence sur dim $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ un idéal de $\mathfrak{h}$ de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. Posons $K' = K \cap U(\mathfrak{g}')$. C'est un idéal bilatère premier, $\mathfrak{h}$-invariant de $U(\mathfrak{g}')$, et les seuls éléments de $U(\mathfrak{g}')/K'$ annulés par $\mathfrak{h}$ sont les scalaires. Soit L un idéal premier $\mathfrak{h}$-invariant de $U(\mathfrak{g})$ contenant K. Alors $L \cap U(\mathfrak{g}')$ contient K', donc $L \cap U(\mathfrak{g}') = K'$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Supposons $L \neq K$. Alors $K = U(\mathfrak{g})\, K'$ [3, Lemme 1-12]. Soient $x \in \mathfrak{g}$, $x \notin \mathfrak{g}'$, et n le plus petit entier tel qu'il existe $a = x^n a_n + \cdots + a_0 \in L$ avec $a_n ,..., a_0 \in U(\mathfrak{g}')$, $a_n \notin K'$. (Tout élément de $U(\mathfrak{g})$ s'écrit de manière unique $\sum x^p a_p$, avec $a_p \in U(\mathfrak{g}')$ pour tout p).

Soit ρ la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $U(\mathfrak{g})$. Pour tout $y \in \mathfrak{h}$, on a $\rho(y) \cdot x \in \mathfrak{g}'$, donc $\rho(y) \cdot a \in x^n(\rho(y) \cdot a_n) + \sum_0^{n-1} x^p U(\mathfrak{g}')$.

L'espace vectoriel $\rho(U(\mathfrak{h})) \cdot a_n$ est de dimension finie, stable par $\mathfrak{h}$ et non contenu dans K'. Il existe donc $u \in U(\mathfrak{h})$ tel que $\rho(u) \cdot a_n \notin K'$, et que $\rho(y)\, \rho(u) \cdot a_n \in K'$ pour tout $y \in \mathfrak{h}$. On a:

$$\rho(u) \cdot a \in x^n(\rho(u) \cdot a_n) + \sum_0^{n-1} x^p U(\mathfrak{g}')$$

et $\rho(u) \cdot a \in L$. En remplaçant a par $\rho(u) \cdot a$, on se ramène donc au cas où $[\mathfrak{h}, a_n] \in K'$. On a alors, pour tout $y \in \mathfrak{h}$,

$$[y, a] \in K + nx^{n-1}[y, x]\, a_n + x^{n-1}[y, a_{n-1}] + \sum_0^{n-2} x^p U(\mathfrak{g}')$$

et $[y,a] \in L$. De la définition de l'entier n, il résulte que $n[y,x]a_n + [y,a_{n-1}] \in K'$, soit $[y, nxa_n + a_{n-1}] \in K'$. Donc $nxa_n + a_{n-1}$ est scalaire modulo K, d'où $a_n \in K'$ puisque $K = U(\mathfrak{g})K'$, contradiction, donc $L = K$.

LEMME 4. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de lie résoluble,* Γ *un groupe algébrique connexe d'automorphismes de* $\mathfrak{g}$, (Spec $U(\mathfrak{g}))^\Gamma$ *l'ensemble des idéaux bilatères premiers de* $U(\mathfrak{g})$ *invariants par* Γ. *Si un point* $K \in$ (Spec $U(\mathfrak{g}))^\Gamma$ *est tel que les seuls éléments invariants par* Γ *du centre de* Fract$(U(\mathfrak{g})/K)$ *soient les scalaires, il est ouvert dans son adhérence dans* (Spec $U(\mathfrak{g}))^\Gamma$. *Si* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente, et si* Γ *est formé d'automorphismes unipotents,* K *est un point fermé.*

En effet, soit $\mathfrak{s}$ l'algèbre de Lie de Γ. Un idéal K de $U(\mathfrak{g})$ est stable par Γ si et seulement si il est stable par $\mathfrak{s}$. Si on note $\mathfrak{h}$ le produit semi-direct $\mathfrak{s} \times_\sigma \mathfrak{g}$, alors (Spec $U(\mathfrak{g}))^\Gamma$ est l'ensemble des idéaux bilatères premiers $\mathfrak{h}$-invariants de $U(\mathfrak{g})$. Si K est un tel idéal, les éléments invariants par Γ du centre de Fract$(U(\mathfrak{g})/K)$ sont exactement les éléments annulés par $\mathfrak{h}$. Enfin la propriété $\check{K} \neq K$, (resp. K maximal dans (Spec $U(\mathfrak{g}))^\Gamma$), équivaut à: $\{K\}$ est ouvert dans son adhérence dans (Spec $U(\mathfrak{g}))^\Gamma$, (resp. $\{K\}$ est fermé dans (Spec $U(\mathfrak{g}))^\Gamma$.

LEMME 5. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* Γ *un groupe algébrique connexe d'automorphismes de* $\mathfrak{g}$, *I un idéal bilatère de* $U(\mathfrak{g})$, $K = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot I$

(i) *Si I est premier, K est premier. Si I est complètement premier, K est complètement premier.*

(ii) *Si I est complètement premier, et si le centre de* Fract$(U(\mathfrak{g})/I)$ *est réduit aux scalaires, alors les seuls éléments invariants par Γ du centre de* Fract$(U(\mathfrak{g})/K)$ *sont les scalaires.*

Démonstration. (i) K est le plus grand idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ stable par l'algèbre de Lie de Γ contenu dans I. On en déduit facilement que si $D_1, \ldots, D_p$ est une base de l'algèbre de Lie de Γ, alors $K = (x \in I;\ D^n(x) \in I$ pour tout $n \in N^p\}$ (Pour $n = (n_1, \ldots, n_p) \in N^p$, on pose $D^n = D_1^{n_1} \cdots D_p^{n_p}$).

On munit N^p de l'ordre total suivant, compatible à l'addition (cf. [4]): $i = (i_1, \ldots, i_p) \leqslant j = (j_1, \ldots, j_p)$ si, ou bien $i_1 + \cdots + i_p < j_1 + \cdots + j_p$, ou bien $i_1 + \cdots + i_p = j_1 + \cdots + j_p$ et $i \leqslant j$ pour l'ordre lexicographique.

Supposons I premier. Soient a et $b \in U(\mathfrak{g})$ tels que $aU(\mathfrak{g})b \in K$ et $b \notin K$. Soit n le plus petit multi-indice tel que $D^n(b) \notin I$ et supposons que $D^i(a) \in I$ pour tout $i < m$. Soit $x \in U(\mathfrak{g})$. On a:

$$I \ni D^{m+n}(axb) = \sum_{i+j+k=m+n} \alpha_{i,j,k} D^i(a)\, D^j(x)\, D^k(b)$$

où les $\alpha_{i,j,k}$ sont des entiers strictement positifs. Comme $D^i(a) \in I$ pour $i < m$ et $D^k(b) \in I$ pour $k < n$, et que: $i + j + k = m + n, m \leqslant i, n \leqslant k \Rightarrow i = m$,

$j = 0$, $k = n$, on voit que $D^m(a)\,xD^n(b) \in I$ pour tout $x \in U(\mathfrak{g})$, donc $D^m(a) \in I$ puisque I est premier. Par récurrence, on en déduit que $a \in K$. Donc K est premier.

On montre de la même façon que K est complètement premier si I l'est.

(ii) Soient a et $b \in U(\mathfrak{g})$, $b \notin K$, d'images $\bar{a}$ et $\bar{b}$ dans $U(\mathfrak{g})/K$, tels que $\gamma(\bar{a}\bar{b}^{-1}) = \bar{a}\bar{b}^{-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $\bar{a}\bar{b}^{-1}$ central dans $\mathrm{Fract}(U(\mathfrak{g})/K)$.

Comme $b \notin \bigcap_\gamma \gamma(I)$, on peut supposer que $b \notin I$.

Soit π: $U(\mathfrak{g})/K \mapsto U(\mathfrak{g})/I$. Alors $\pi(\bar{a})\,\pi(\bar{b})^{-1}$ est central dans $\mathrm{Fract}(U(\mathfrak{g})/I)$, donc égal à un scalaire λ. Donc $u = \lambda b - a \in I$. Comme $\bar{a}\bar{b}^{-1}$ est central, il commute à $\bar{b}$, donc $\bar{a}$ commute à $\bar{b}$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a donc:

$$\gamma(\bar{a})\,\gamma(\bar{b})^{-1} = \bar{a}\bar{b}^{-1} = \bar{b}^{-1}\bar{a}, \qquad \text{donc:} \quad \bar{b}\gamma(\bar{a}) = \bar{a}\gamma(\bar{b})$$

d'où $u_\gamma = b\gamma(a) - a\gamma(b) \in K$. On a $\gamma(u) = \lambda\gamma(b) - \gamma(a)$, d'où

$$b\gamma(u) = \lambda b\gamma(b) - b\gamma(a) = (\lambda b - a)\,\gamma(b) - u_\gamma \in I.$$

Comme $b \notin I$, cela entraîne $\gamma(u) \in I$, donc $\bar{a}\bar{b}^{-1} = \lambda$.

THÉORÈME 2. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente,* Γ *un groupe algébrique connexe d'automorphismes de* $\mathfrak{g}$. *Les* Γ*-orbites dans* Prim $U(\mathfrak{g})$ *sont ouvertes dans leur adhérence. Si* Γ *est formé d'automorphismes unipotents, elles sont fermées.*

Démonstration. Soit $I \in \mathrm{Prim}\, U(\mathfrak{g})$. Alors I est complètement premier et le centre de $\mathrm{Fract}(U(\mathfrak{g})/I)$ est réduit aux scalaires ([3]). D'après les Lemmes 4 et 5, l'idéal $K = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma(I)$ est un point de $(\mathrm{Spec}\, U(\mathfrak{g}))^\Gamma$ ouvert dans son adhérence, (un point fermé si Γ est formé d'automorphismes unipotents).

Il est clair que l'application $I \mapsto K$ de Prim $U(\mathfrak{g})$ dans $(\mathrm{Spec}\, U(\mathfrak{g}))^\Gamma$ est continue. Par suite, l'image réciproque de K est un ensemble ouvert dans son adhérence, (un ensemble fermé si Γ est formé d'automorphismes unipotents). Elle consiste en les $I' \in \mathrm{Prim}\, U(\mathfrak{g})$ dont l'orbite sous Γ a même adhérence que celle de I, et coïncide donc avec l'orbite de I, d'après le Théorème 1.

REFERENCES

1. N. CONZE ET M. DUFLO, Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble, *Bull. Sci. Math.* **94** (1970), 201–208.
2. N. CONZE ET M. VERGNE, Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie résolubles," *C. R. Acad. Sci. Paris* **272** (1971), 985–988.
3. J. DIXMIER, Représentations irréductibles des algèbres de Lie résolubles, *J. Math. Pur. Appl.* **45** (1966), 1–117.

4. J. Dixmier, Sur les représentations induites des algèbres de Lie, *J. Math. Pure. Appl.* **50** (1971), 1–24.
5. J. Dixmier, *Bull. Sci. Math.* 2e sér. **96** (1972), 17–26.
6. M. Duflo, Sur les représentations irréductibles des algèbres de Lie contenant un idéal nilpotent, *C. R. Acad. Sci. Paris* **270** (1970), 504–506.
7. Y. Nouazé et P. Gabriel, Idéaux premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, *J. Algebra* **6** (1967), 77–99.
8. R. Rentschler, Sur la topologie des ensembles irréductibles de Prim $U(g)$ pour des algèbres de Lie nilpotentes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **274** (1972), 27–30.
9. M. Rosenlicht, On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **101** (1961), 211.